ПОЛУРЕШЁТКИ ЛАХЛАНА И ПОЛУРЕШЁТКИ РОДЖЕРСА

Ю. Л. ЕРШОВ

В работах [1, 2] автор обсуждает некоторые полезные взаимоотношения между алгеброй и логикой. Здесь будет рассмотрен ещё один интересный случай. В работах Лахлана [3, 4, 5] установлены важные свойства семейств m-степеней. В работе [3] определено довольно громоздкое алгебраическое понятие, которое оказалось эквивалентным понятию дистрибутивной верхней полурешётки. В работе [5] для описания главных идеалов полурешётки рекурсивно-перечислимых m-степеней был введён объект, который позже был назван полурешёткой Лахлана. В работах С. Ю. Подзорова [11, 12] было произведено дальнейшее исследование понятия полурешётки Лахлана. В работе [4] была установлена такая

Теорема. *Для любой m-степени $\underline{a}$ существует m-степень $\underline{b}$ такая, что $\underline{a} < \underline{b}$ и для любой m-степени $\underline{c}$ такой, что $\underline{c} < \underline{b}$, справедливо $\underline{c} \leqslant \underline{a}$.*

Также аналогичная теорема была установлена о полурешётке рекурсивно перечислимых m-степеней для $\underline{a}$, не являющегося наибольшим элементом.

В работе автора [6] было установлено следующее расширение этой теоремы.

Теорема. *Для любой счётной дистрибутивной полурешётки D и её идеала I любое изоморфное вложение I на идеал полурешётки L_m всех m-степеней продолжается до изоморфного вложения D на идеал из L_m.*

Оказалось, что это свойство инъективности полурешётки L_m справедливо и для полурешётки L_F всех нумераций любого неодноэлементного конечного множества F.

Отсюда легко следует, что в предположении континуум-гипотезы любая такая полурешётка L_F изоморфна L_m.

В работе [7] Е. А. Палютина установлена справедливость этого утверждения без предположения континуум-гипотезы.

Пусть S — некоторое семейство рекурсивно-перечислимых множеств. Полурешётка L_S^0 всех вычислимых нумераций семейства S называется *полурешёткой Роджерса семейства S*.

Если S — конечное семейство, то полурешётка Роджерса L_S^0 имеет наибольший элемент и является полурешёткой Лахлана.

Пусть n — натуральное число, $S_n \leftrightharpoons \{\varnothing, \{0\}, \ldots, \{n\}\}$. С. Д. Денисов [10] установил следующий замечательный результат:

Теорема. *Пусть L — полурешётка Лахлана, $a \in L$. Тогда любое эффективное вложение идеала $\hat{a}$ на идеал $L_{S_n}^0$ продолжается до эффективного вложения L на идеал $L_{S_n}^0$.*

Отсюда вытекает, что для любых натуральных n и m полурешётки $L_{S_n}^0$ и $L_{S_m}^0$ изоморфны.

Полурешётки Лахлана, обладающие этим свойством, называются *универсальными.*

Пусть S и T — два конечных семейства рекурсивно перечислимых множеств. Когда их полурешётки Роджерса L_S^0 и L_T^0 изоморфны?

Нетрудно установить, что если частично упорядоченные множества $\langle S, \subseteq\rangle$ и $\langle T, \subseteq\rangle$ изоморфны, то и их полурешётки Роджерса также изоморфны.

Теорема Денисова показывает, что это достаточное условие не является необходимым.

Для каждого семейства рекурсивно перечислимых множеств S через S^0 обозначим семейство всех немаксимальных (по включению) множеств из S. (Так, $S_n^0 = \{\varnothing\}$).

В работе [8] установлено, что изоморфизм частично упорядоченных множеств $\langle S^0, \subseteq\rangle$ и $\langle T^0, \subseteq\rangle$ является необходимым для изоморфизма их полурешёток Роджерса.

О. В. Кудинов предположил, что эти условия являются и достаточными.

До настоящего времени эта гипотеза не доказана.

Другим открытым вопросом является: Будут ли (изоморфные) полурешётки Роджерса $L_{S_n}^0$ и $L_{S_m}^0$ изоморфны и как нумерованные множества?

В работе автора [9] было получено некоторое расширение результата Денисова. Используя технику из этой работы, можно установить следующую теорему:

Теорема. *Полурешётка Роджерса $L_{S_\omega}^0$ семейства $S_\omega \leftrightharpoons \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots\}$ является универсальной решёткой Лахлана.*

Почему работы Лахлана [4, 5] оказались опубликованы в журнале «Алгебра и логика»? Это сейчас наш журнал попал в Q1 базы Scopus. А тогда (1972) «Алгебра и логика» даже не являлся журналом (а был трудом одноимённого семинара). Думаю, что статьи [4, 5], технически довольно сложные, не представляли широкого интереса для исследователей, которые не обладали достаточным опытом одновременно в теории вычислимости и в алгебре.

Поэтому «Алгебра и логика» оказалась наиболее подходящим местом для публикации этих замечательных статей, которые оказали огромное влияние на дальнейшие исследования.

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов. Алгебра и логика: старые и новые связи. *Философия науки*, 23(4), 132–142, 2004.

[2] Ю. Л. Ершов. На пути от логики к алгебре. *Успехи математических наук*, 65(5), 143–156, 2010.

[3] A. H. Lachlan. Initial segments of many-one degrees. *Canadian Journal of Mathematics*, 22, 75–85, 1970.

[4] A. H. Lachlan. Two theorems on many-one degrees of recursively enumerable sets. *Algebra and Logic*, 11(2), 216–229, 1972.

[5] A. H. Lachlan. Recursively enumerable many-one degrees. *Algebra and Logic*, 11(3), 186–206, 1972.

[6] Ю. Л. Ершов. Верхняя полурешётка нумераций конечного множества. *Алгебра и логика*, 14(3), 258–284, 1975.

[7] Е. А. Палютин. Дополнение к статье Ю. Л. Ершова "Верхняя полурешётка нумераций конечного множества". *Алгебра и логика*, 14(3), 284–287, 1975.

[8] Ю. Л. Ершов. Необходимые условия изоморфизма полурешёток Роджерса конечных частично упорядоченных множеств. *Алгебра и логика*, 42(4), 413–421, 2003.

[9] Ю. Л. Ершов. Полурешётки Роджерса конечных частично упорядоченных множеств. *Алгебра и логика*, 45(1), 44–84, 2006.

[10] С. Д. Денисов. Строение верхней полурешётки рекурсивно-перечислимых m-степеней и смежные вопросы. *Алгебра и логика*, 17(6), 643–683, 1978.

[11] С. Ю. Подзоров. Об определении лахлановской полурешётки. *Алгебра и логика*, 47(2), 383–393, 2006.

[12] С. Ю. Подзоров. Нумерованные дистрибутивные полурешётки. *Математические труды*, 9(2), 109–132, 2006.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Email address: ershov@math.nsc.ru